5.3 Различные виды сходимости, связанные с понятием меры

Пусть T — произвольное непустое множество. Рассмотрим последовательность функций $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x_n\colon T \to \mathbb{R}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Если на некоторой σ-алгебре $\mathscr{A} \subset 2^T$ задана мера μ, то мы, кроме поточечной и равномерной сходимости последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можем говорить о сходимости по мере, сходимости почти всюду и о почти равномерной сходимости.

Определение. Говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $x\colon T \to \mathbb{R}$ *почти всюду* (*п.в.*), если существует такое множество $A \in \mathscr{A}$, что $\mu(A) = 0$ и на множестве $T \setminus A$ последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x поточечно.

Определение. Говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $x\colon X \to \mathbb{R}$ *почти равномерно* (*по Егорову*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $A \in \mathscr{A}$, что $\mu(A) < \varepsilon$ и на множестве $T \setminus A$ последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x равномерно.

Определение. Говорят, что последовательность измеримых функций $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к измеримой функции $x\colon T \to \mathbb{R}$ *по мере*, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left\{t \in T : |x_n(t) - x(t)| \geqslant \varepsilon\right\} = 0.$$

Теорема 5.5. *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций.*

(i) Если $x_n \to x$ почти равномерно, то $x_n \to x$ почти всюду;

(ii) Если $x_n \to x$ почти равномерно, то $x_n \to x$ по мере.

Теорема 5.6. *Если $x_n \to x$ по мере, то найдётся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая сходится к x п.в.*

Доказательство. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ по условию

$$\mu\left\{t : |x_n(t) - x(t)| \geqslant 1/k\right\} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдётся такой номер n_k, что

$$\mu\left\{t : |x_n(t) - x(t)| \geqslant 1/k\right\} < \frac{1}{2^k} \text{ при } n \geqslant n_k.$$

В частности, $\mu A_k < \frac{1}{2^k}$, где $A_k = \{t : |x_{n_k}(t) - x(t)| \geqslant 1/k\}$. Рассмотрим множества $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Эти множества образуют убывающую последовательность, причём $\mu B_n \leqslant 1/2^{n-1} \to 0$. В силу этого множество $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ имеет меру ноль. Пусть $t \in T \setminus B$. Тогда найдётся такой k_0, что $t \notin B_{k_0}$, откуда $t \notin A_k = \{t : |x_{n_k}(t) - x(t)| \geqslant 1/k\}$ при $k \geqslant k_0$. Последнее означает, что $|x_{n_k}(t) - x(t)| < 1/k$ при $k \geqslant k_0$, то есть $x_{n_k}(t) \to x(t)$. $\square$

Теорема 5.7 (Егоров). *Пусть μ — счётно-аддитивная мера, $\mu(T) < +\infty$ и $x_n \colon T \to \mathbb{R}$ — последовательность измеримых функций. Если $x_n \to x$ почти всюду, то $x_n \to x$ почти равномерно.*

Доказательство. Т.к. $x_n \to x$ п.в., то найдётся $Y \subset T$ такое, что $\mu(Y) = 0$ и на множестве $T_0 = T \setminus Y$ $x_n \to x$ поточечно. Достаточно доказать, что для любого $\delta > 0$ найдётся множество $A \subset T_0$ такое, что $\mu(A) < \delta$ и на множестве $T_0 \setminus A$ будет $x_n \rightrightarrows x$. Рассмотрим множества

$$B_{nm} = \bigcap_{k \geqslant n} \{t \in T_0 : |x_k(t) - x(t)| < 1/m\}.$$

Ясно, что для любого фиксированного m будет $B_{1m} \subset B_{2m} \subset B_{3m} \subset \ldots$ и что $T_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{nm}$.

Введём обозначение $B_{0m} = \varnothing$. Тогда $T_0 = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_{nm} \setminus B_{n-1,m}$, откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_{nm} \setminus B_{n-1,m}) = \mu T_0 < +\infty.$$

Таким образом, для каждого m найдётся n_m такой, что $\mu(T_0 \setminus B_{n_m m}) < \delta/2^m$ (это следует из равенства $\bigsqcup_{n=1}^{p}(B_{nm} \setminus B_{n-1,m}) = B_{pm}$).

Определим множество $A = \bigcup_{m=1}^{\infty}(T_0 \setminus B_{n_m m})$. Ясно, что $\mu(A) < \delta$ и что $T_0 \setminus A = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_{n_m m}$.

Осталось доказать, что на множестве $T_0 \setminus A$ сходимость равномерная. Пусть $\varepsilon > 0$. Зафиксируем такой номер m, что $1/m < \varepsilon$. Тогда для любого $t \in B_{n_m m}$ по определению множеств $B_{n_m m}$ будет выполняться неравенство $|x_n(t) - x(t)| < 1/m < \varepsilon$ при $n \geqslant n_m$, а это означает, что на множестве $B_{n_m m}$ (тем более и на множестве $T_0 \setminus A$) последовательность $\{x_n\}$ сходится к x равномерно. $\square$

Пусть T — топологическое пространство. Напомним, что наименьшая σ-алгебра $\mathscr{B}(T) \subset 2^T$, содержащая все открытые подмножества пространства T, называется *борелевской* σ-алгеброй.

$\mathscr{B}(T)$ можно определить и как наименьшую σ-алгебру, содержащую все замкнутые подмножества пространства T.

Определение. Пусть T — топологическое пространство и Σ — σ-алгебра в T, содержащая все открытые подмножества пространства T (то есть $\Sigma \supset \mathscr{B}(T)$). Конечная мера μ на Σ называется *регулярной*, если для любого $S \in \Sigma$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют замкнутое $F \subset S$ и открытое $U \supset S$ такие, что $\mu(S \setminus F) < \varepsilon$ и $\mu(U \setminus S) < \varepsilon$.

Эквивалентное определение: $\mu(S) = \sup\limits_{F \subset S} \mu(F) = \inf\limits_{U \supset S} \mu(U)$.

Теорема 5.8 (Лузин). *Пусть T — нормальное пространство и Σ — σ-алгебра в T, содержащая все открытые подмножества пространства X; μ — счётно-аддитивная регулярная мера на Σ такая, что $\mu(T) < +\infty$; пусть $x\colon T \to \mathbb{R}$ — измеримая ограниченная функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое замкнутое множество $F \subset T$, что $\mu(T \setminus F) < \varepsilon$ и $x|_F$ непрерывна.*

Доказательство. Так как x ограничена, то найдётся такое число M, что множество значений функции x содержится в отрезке $[-M, M]$. Зафиксируем n и разделим $[-M, M]$ на n равных частей точками $y_0, \ldots, y_n$. Длина каждого отрезка будет равна $2M/n$. Определим множества

$$A_{nk} = \{t \in T : y_{k-1} \leqslant x(t) < y_k\}, \quad k = 1, \ldots, n-1;$$

$$A_{nn} = \{t \in T : y_{n-1} \leqslant x(t) \leqslant y_n\}.$$

Все множества A_{nk} измеримы и попарно не пересекаются. Так как мера μ регулярна, то для каждого $k = 1, \ldots, n$ найдётся такое замкнутое множество $F_{nk} \subset A_{nk}$, что $\mu(A_{nk} \setminus F_{nk}) < \frac{1}{n2^n}$. Пусть $H_n = \bigcup_{k=1}^n F_{nk}$. Определим непрерывную функцию $\varphi_n\colon H_n \to \mathbb{R}$:

$$\varphi_n(t) = y_{k-1}, \text{ если } t \in F_{nk}.$$

По теореме Титце–Урысона непрерывно продолжим φ_n на все пространство T. Продолжение обозначим Φ_n.

Докажем, что последовательность $\{\Phi_n\}$ сходится к x по мере. Пусть $\varepsilon > 0$. найдём n_0 так, чтобы $2M/n_0 < \varepsilon$ и рассмотрим множества

$$B_n = \{t \in T : |\Phi_n(t) - x(t)| \geqslant 2M/n_0\}.$$

найдём их меру. Если $t \in H_n$, то $t \in F_{nk}$ и тогда

$$|\Phi_n(t) - x(t)| = |\varphi_n(t) - x(t)| = |y_{k-1} - x(t)| < 2M/n_0 < \varepsilon \quad \text{при } n \geqslant n_0.$$

Доказанное неравенство означает, что $B_n \subset T \setminus H_n$. Тогда

$$\mu B_n \leqslant \mu(T \setminus H_n) = \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n (A_{nk} \setminus F_{nk})\right) < n \cdot \frac{1}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

Наконец,

$$\mu\{t \in T : |\Phi_n(t) - x(t)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \mu B_n < \frac{1}{2^n} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

Итак, $\{\Phi_n\}$ сходится к x по мере. Тогда по теореме 5.6 найдётся подпоследовательность $\{\Phi_{n_k}\}$, сходящаяся к x почти всюду, а значит, в силу теоремы Егорова, $\Phi_{n_k} \to x$ почти равномерно. Это значит, что для $\varepsilon/2$ найдётся множество A, $\mu(A) < \varepsilon/2$ и на множестве $T \setminus A$ $\Phi_{nk} \rightrightarrows x$. Значит, функция x

непрерывна на $T \setminus A$. Наконец, в силу регулярности меры μ найдётся такое замкнутое множество $F \subset T \setminus A$, что $\mu((T \setminus A) \setminus F) < \varepsilon/2$ откуда $\mu(T \setminus F) < \varepsilon$ и $x|_F$ непрерывна (так как $F \subset T \setminus A$, а на $T \setminus A$ функция x была непрерывна). $\square$